UNIVERSIDAD SIMÓN BOLIVAR

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PURAS Y APLICADAS

Matemáticas 1 (MA-1111)
1er Examen Parcial (30%)
Enero-Marzo 2019

Modelo B

Duración: 1 hora 50 minutos

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

Pregunta 1. (5 puntos) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación

$$|x^2 - 3x - 5| \geq |x^2 + 6|$$

Pregunta 2. (5 puntos) Determine el dominio de la función dada por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^4 - 8x} + \cos^{-1}\left(3 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Pregunta 3. (6 puntos) Hallar la ecuación de los círculos de radio 10 tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3,4).

Pregunta 4. Sea $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1\,, & si \quad x < -1 \\ \cos^{-1}(x)\,, & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3x-5}{5}\,, & si \quad x > 1 \end{cases}$

a) **(2 Puntos)** Hallar $f\left(\sqrt[3]{-\frac{115}{2}}\right)$ y $f\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

b) **(2 puntos)** Hallar el dominio y el rango de f.

c) **(2 puntos)** Determine si f es inyectiva.

d) **(3 puntos)** Si $h(x) = 3x + 1$. Determine $f \circ h$ y bosqueje su gráfico.

Pregunta 5. (5 puntos) SI $-1 \leq x \leq 1$, exprese en términos de x la función $f(x) = \sec(\sin^{-1}(x)) + \cos\left(\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Debe calcular el valor numérico del $\cos\left(\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

SOLUCIONES

Pregunta 1. (5 puntos) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación

$$|x^2 - 3x - 5| \geq |x^2 + 6|$$

Solución:

Se hará uso de la propiedad de valor absoluto:

$$|x|^2 = x^2$$

Lo cual permitirá, al elevar ambos miembros de la inecuación al cuadrado, resolverla como una inecuación sin valor absoluto

$$|x^2 - 3x - 5| \geq |x^2 + 6|$$
$$|x^2 - 3x - 5|^2 \geq |x^2 + 6|^2$$
$$x^4 - 6x^3 - x^2 + 30x + 25 \geq x^4 + 12x^2 + 36$$
$$6x^3 + 13x^2 - 30x + 11 \leq 0$$
$$(x-1)(2x-1)(3x+11) \leq 0$$

	$-\infty$ … $-\frac{11}{3}$	$-\frac{11}{3}$ … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … 1	1 … $+\infty$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(2x-1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(3x+11)$	$-$	$+$	$+$	$+$
Total:	$-$	$+$	$-$	$+$

Resultado: $x \in \left(-\infty, -\frac{11}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Pregunta 2. (5 puntos) Determine el dominio de la función dada por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^4 - 8x} + \cos^{-1}\left(3 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Solución:

Hay que hallar las restricciones del dominio en cada una de las funciones que componen a f:

- El argumento dentro de la raíz cuadrada debe ser positivo:

$$9 - x^2 \geq 0$$
$$x^2 \leq 9$$
$$|x| \leq 3$$
$$-3 \leq x \leq 3$$

$$x \in [-3,3]$$

- El valor de los denominadores debe ser distinto de cero:

$$\begin{array}{c} x^4 - 8x \neq 0 \\ x(x^3 - 8) \neq 0 \\ x(x-2)(x^2+2x+4) \neq 0 \\ x \neq 0 \qquad x \neq 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} x^2 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{array}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{0,2\}$$

- El argumento de la función $\cos^{-1}(x)$ solo admite valores entre -1 y 1:

$$-1 \leq 3 - \frac{1}{x^2} \leq 1$$

$$\left|3 - \frac{1}{x^2}\right| \leq 1$$

$$\bigstar \quad \frac{|3x^2 - 1|}{x^2} \leq 1$$

$$|3x^2 - 1| \leq x^2$$

$$|3x^2 - 1|^2 \leq (x^2)^2$$

$$9x^4 - 6x^2 + 1 \leq x^4$$

$$8x^4 - 6x^2 + 1 \leq 0$$

$$(2x^2 - 1)(4x^2 - 1) \leq 0$$

$$\left(\sqrt{2}x - 1\right)\left(\sqrt{2}x + 1\right)(2x-1)(2x+1) \leq 0$$

$$-\infty \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad -\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad +\infty$$

$\left(\sqrt{2}x - 1\right)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\left(\sqrt{2}x + 1\right)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(2x - 1)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(2x + 1)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
Total:	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$\bigstar$ *(tenga en cuenta que el x^2 puede pasar multiplicando al otro extremo de la inecuación porque es un término que siempre es positivo y por lo tanto no la altera)*

Lo único que resta ahora, es interceptar todos los dominios que se acaban de obtener:

$$x \in (x \in [-3,3]) \cap (\mathbb{R} - \{0,2\}) \cap \left(\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)$$

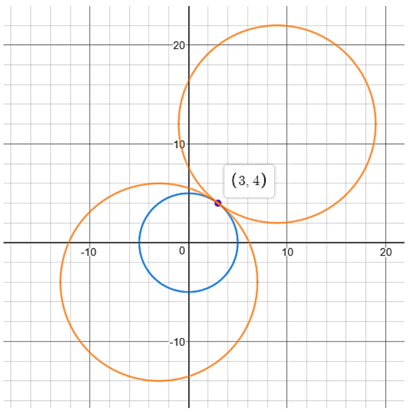
$$x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Pregunta 3. (6 puntos) Hallar la ecuación de los círculos de radio 10 tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3,4)$.

Solución:

El problema da una circunferencia de ecuación: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 25}$ Gracias a eso se conoce que la circunferencia es de **radio 5 centrada en** $(\mathbf{0, 0})$. También da un punto perteneciente a la misma: $(\mathbf{3, 4})$.

Lo que pide el problema es encontrar las **circunferencias tangentes** a la ya dada en el punto indicado. Además, dichas circunferencias deben ser de **radio 10**. Por lo que el bosquejo de lo que se quiere quedaría como la imagen que se tiene a continuación.



Como se puede dar cuenta, son dos las circunferencias que pueden ser tangentes es este punto. **Para armar una circunferencia son necesarios el radio y el centro de la misma**. El radio está dado por el problema. Lo que hace falta es conseguir los centros.

Cuando dos circunferencias se interceptan en un solo punto, dicho punto pertenecerá a la recta que une a ambos centros de la circunferencia. Con esta información se puede estar seguro que el centro de las circunferencias pedidas pertenecen a la recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(3,4)$.

Se arma la recta a partir de los puntos $(0,0)$ y $(3,4)$:

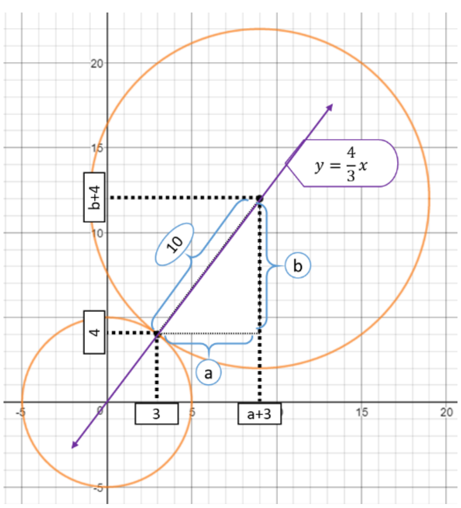
Pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

Recta:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$y = \frac{4}{3}x$$



Ahora, entre el centro de cada circunferencia que se pide, y el punto $(3,4)$ debe haber una distancia de 10 (ya que ese es el valor de radio que se pide). Por lo que se hará uso de la ecuación de distancia punto-punto de la siguiente manera:

$$10 = \sqrt{[(a+3) - (3)]^2 + [(b+4) - (4)]^2}$$

$$10 = \sqrt{[a]^2 + [b]^2}$$

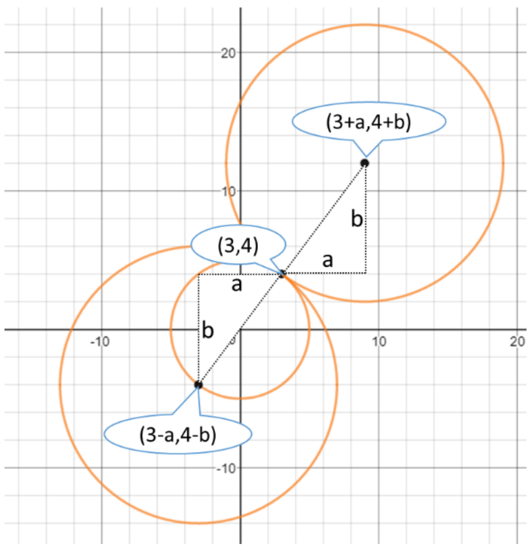
Además de esta relación, como pertenecen a la recta antes creada se sabe que:

$$y = \frac{4}{3}x \quad \Rightarrow \quad b = \frac{4}{3}a$$

De esta forma solo hay que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} = 10 \\ b = \dfrac{4}{3}a \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \sqrt{a^2+b^2} &= 10 \\ \sqrt{a^2+\left(\frac{4}{3}a\right)^2} &= 10 \\ \sqrt{\frac{25}{9}a^2} &= 10 \\ \frac{5}{3}a &= 10 \\ a &= 6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} b &= \frac{4}{3}a \\ b &= \frac{4}{3}(6) \\ b &= 8 \end{aligned}$$

Conocidos a y b, se puede determinar el valor de los centros de las circunferencias y por ende la ecuación de las mimas:



Centro (1)

$$(3+a, 4+b) = (9,12)$$

Ecuación (1)

$$(x-9)^2 + (y-12)^2 = 100$$

Centro (2)

$$(3-a, 4-b) = (-3,-4)$$

Ecuación (2)

$$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 100$$

Pregunta 4. Sea $f(x) = \begin{cases} -x^3+1\,, & si \quad x < -1 \\ \cos^{-1}(x)\,, & si \quad -1 \le x \le 1 \\ \frac{3x-5}{5}\,, & si \quad x > 1 \end{cases}$

a) **(2 Puntos)** Hallar $f\left(\sqrt[3]{-\frac{115}{2}}\right)$ y $f\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

b) **(2 puntos)** Hallar el dominio y el rango de f.

c) **(2 puntos)** Determine si f es inyectiva.

d) **(3 puntos)** Si $h(x) = 3x + 1$. Determine $f \circ h$ y bosqueje su gráfico.

Solución:

a) Se sabe que $\sqrt[3]{-27} = -3$, $\sqrt[3]{-64} = -4$ y que $-\frac{155}{2} = -57.5$ entonces se cumple la siguiente relación:

$$\sqrt[3]{-64} < \sqrt[3]{-57.5} < \sqrt[3]{-27} < -1$$

Por esta razón se sabe que para evaluar $f\left(\sqrt[3]{-\frac{115}{2}}\right)$ se utilizará el comportamiento de f para las $x < -1$:

$$f\left(\sqrt[3]{-\frac{115}{2}}\right) = -\left(\sqrt[3]{-\frac{115}{2}}\right)^3 + 1 = \frac{115}{2} + 1 = \frac{117}{2}$$

Por otro lado, se sabe que $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$. Por lo tanto se puede calcular el valor de $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ de la siguiente forma:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $\sqrt{2} < 2$ el cociente de la división entre $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ debe encontrarse comprendido en el intervalo entre 1 y -1. Por esta razón, para evaluar $f\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ se utilizará el comportamiento de f para las $-1 \leq x \leq 1$:

$$f\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\pi}{4}$$

b) **Dominio:**

Para evaluar el dominio de una función a trozos, hay que encontrar el dominio de cada una de las funciones que la compone, para luego interceptarlo con el intervalo donde se encuentra definido ese comportamiento de la función a trozos. Finalmente el dominio de la función será la unión de estos intervalos restringidos.

$f(x) = \cos^{-1}(x)$ Para las x del intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Justamente este intervalo es igual al dominio de la función $\cos^{-1}(x)$ por lo que no hay que restringir el intervalo. Mientras tanto, los otros comportamientos que adopta $f(x)$ son polinomios, los cuales aceptan como dominio todo el conjunto $\mathbb{R}$. El valor de dominio es entonces:

$$Dom\big(f(x)\big): x \in \big(\mathbb{R} \cap (-\infty, -1)\big) \cup ([-1,1] \cap [-1,1]) \cup \big(\mathbb{R} \cap (1, \infty)\big)$$

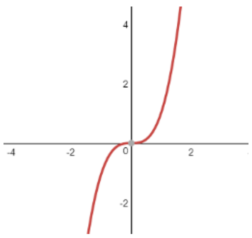
$$Dom\big(f(x)\big): x \in (-\infty, -1) \cup [-1,1] \cup (1, \infty)$$

$$Dom\big(f(x)\big): x \in \mathbb{R}$$

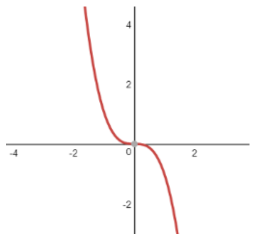
Rango:

Un método para definir el rango de una función a trozos es haciendo un bosquejo de su gráfica:

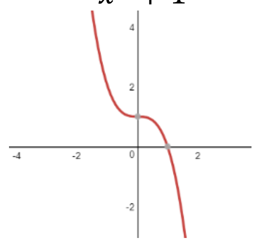
x^3



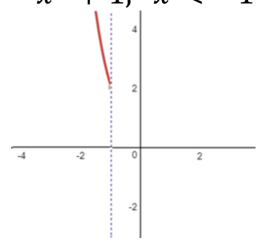
$-x^3$



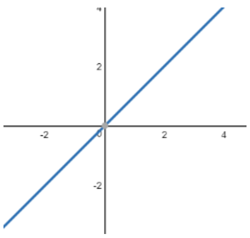
$-x^3 + 1$



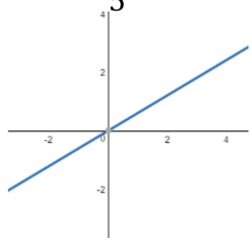
$-x^3 + 1, \quad x < -1$



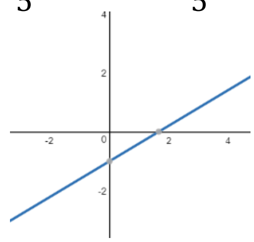
x



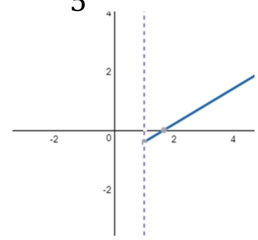
$\frac{3}{5}x$



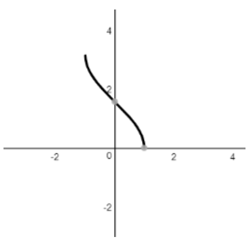
$\frac{3}{5}x - 1 = \frac{3x - 5}{5}$



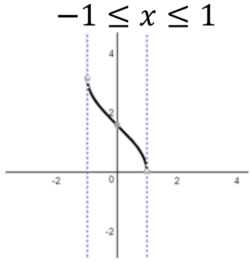
$\frac{3x - 5}{5}, \quad x > 1$



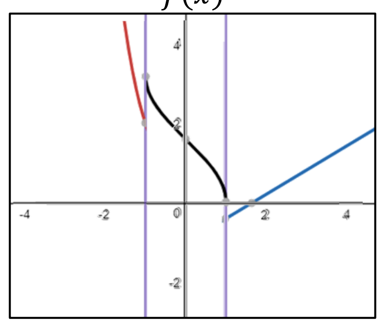
$\cos^{-1}(x)$



$\cos^{-1}(x)$
$-1 \leq x \leq 1$



$f(x)$



Se puede notar como todos los $y > 0$ pertenecen al rango. Mientras que los valores negativos llegan hasta un punto específico que pertenece a la parte grafica de $y = \frac{3x-5}{5}$.

Se busca el valor de y haciendo $x = 1$, y se obtiene el punto $(1, -2/5)$

Por lo tanto el rango de $f(x)$ se define:

$$Ran\big(f(x)\big): x \in \left(-\frac{2}{5}, \infty\right)$$

(con el $-2/5$ abierto ya que el valor de 1 también va abierto dentro de la grafica $y = \frac{3x-5}{5}$)

c) Para evaluar la inyectividad de la función basta con observar la gráfica del paso anterior y darse cuenta que hay varios valores de x distintos que tienen la misma y. Para demostrar que no es inyectiva se escogerá un valor de y apropiado, como por ejemplo $y=0$ ya que en la gráfica se ve que en este punto $y=0$ tiene dos posibles valores de x:

$$-x^3+1=0 \qquad\qquad \cos^{-1}(x)=0 \qquad\qquad \frac{3x-5}{5}=0$$
$$x=1 \qquad\qquad\qquad x=1 \qquad\qquad\qquad x=5/3$$

Este resultado se descarta porque ese valor de x no pertenece al intervalo en donde $-x^3+1=y$ está definido dentro de $f(x)$

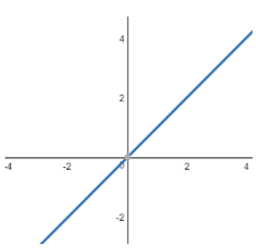
Al demostrar que al menos hay más de un valor de x para una misma imagen. Se puede asegurar que la función no es inyectiva

d) Como $f \circ h \Rightarrow f\big(h(x)\big) \underset{=}{\Rightarrow} f(3x+1)$ lo que se debe hacer es sustituir todos las x que están en $f(x)$ y cambiarlas por $(3x+1)$:

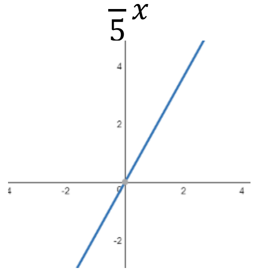
$$f(3x+1)=\begin{cases} -(3x+1)^3+1\,, & si \quad (3x+1)<-1 \\ \cos^{-1}(3x+1)\,, & si \quad -1\le(3x+1)\le 1 \\ \dfrac{3(3x+1)-5}{5}\,, & si \quad (3x+1)>1 \end{cases}$$

$$f(3x+1)=\begin{cases} 1-(3x+1)^3\,, & si \quad x<-\dfrac{2}{3} \\ \cos^{-1}(3x+1)\,, & si \quad -\dfrac{2}{3}\le x\le 0 \\ \dfrac{9x-2}{5}\,, & si \quad x>0 \end{cases}$$

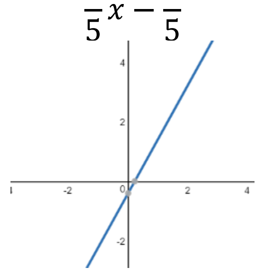
x



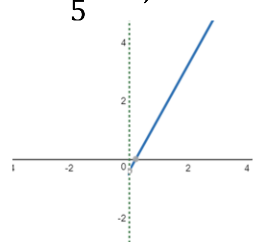
$\frac{9}{5}x$



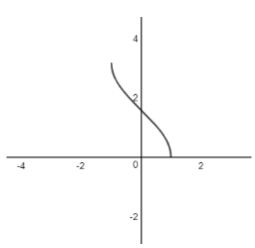
$\frac{9}{5}x-\frac{2}{5}$



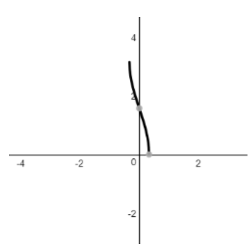
$\frac{9x-2}{5}\ ,x>0$



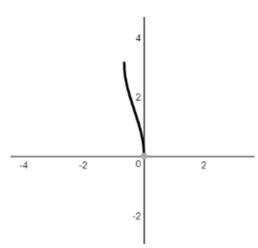
$\cos^{-1}(x)$



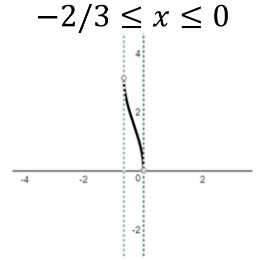
$\cos^{-1}(3x)$

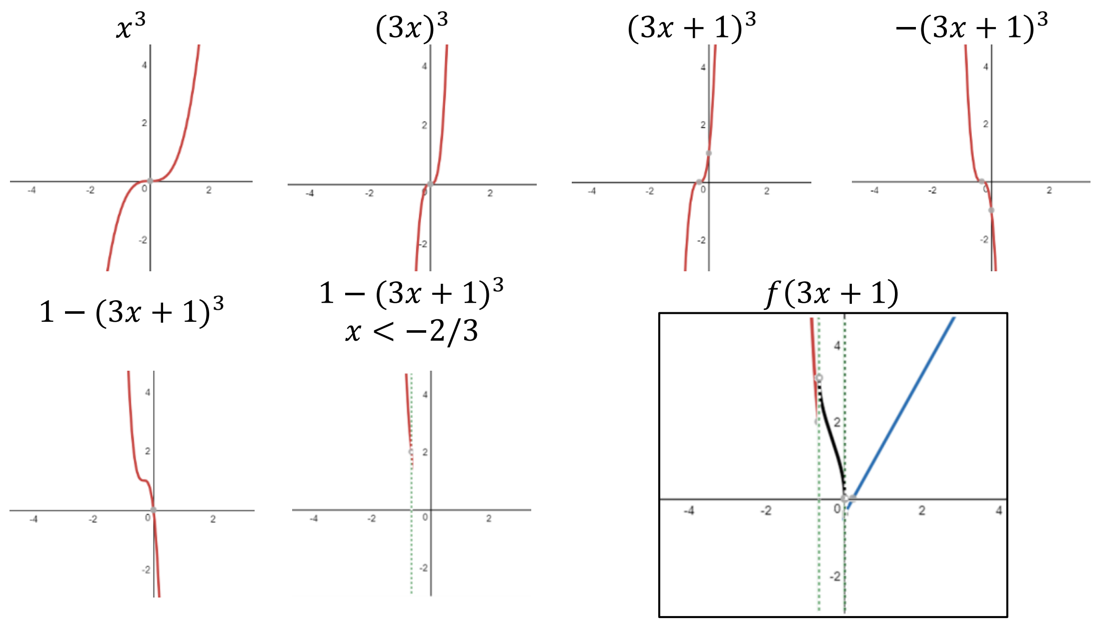


$\cos^{-1}(3x+1)$



$\cos^{-1}(3x+1)$
$-2/3\le x\le 0$





Pregunta 5. (5 puntos) SI $-1 \le x \le 1$, exprese en términos de x la función $f(x) = \sec(\sin^{-1}(x)) + \cos\left(\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$. Debe calcular el valor numérico del $\cos\left(\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

Solución:

La idea del ejercicio es escribir la secante en función del seno y el coseno en función de la cotangente. De esta forma se podrá aprovechar la propiedad de las funciones inversas: $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$

$$\sec\left(\sin^{-1}(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\left(\sin^{-1}(x)\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Será útil recordar las identidades trigonométricas:

$$1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{\sec(x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\cot^2(x)}}} = \frac{|\cot(x)|}{\sqrt{\cot^2(x)+1}}$$

$$\cos\left(\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\left|\cot\left(\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right|}{\sqrt{\cot^2\left(\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)+1}} = \frac{|1/2\ |}{\sqrt{(1/2)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$f(x) = \sec(\sin^{-1}(x)) + \cos\left(\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Resuelto y digitalizado por bachiller: **Mario Artis**

Carnet: **15-10095**